RECENSIONI
SCHEDE BIBLIOGRAFICHE
E NOTIZIE

Achille Maffini (2017). *Didattica delle equazioni: una proposta*. Prefazione di Carlo Marchini. Bologna: Pitagora.

Parliamoci chiaro: se c'è una cosa che sembra facilissima da insegnare e da apprendere in matematica è proprio il concetto di equazione. Adattarlo all'ordine di scuola, alla classe, al singolo studente, in relazione agli obiettivi specifici che si vogliono raggiungere, sembra alla portata di qualsiasi insegnante di matematica, una sfida piacevole e coinvolgente, pure divertente. Ebbene, se siete insegnanti, ingegneri, medici, avvocati… convinti di tutto ciò allora questo libro è per voi. A maggior ragione se siete studenti o ex-studenti che, pur non avendo incontrato particolari difficoltà nella gestione delle equazioni, hanno provato un senso di profonda insoddisfazione di fronte a certe definizioni, principi, trattamenti, interpretazioni o spiegazioni, e hanno tuttora l'impressione di non aver capito bene tutto fino in fondo. Se siete persone curiose o desiderose di approfondire gli aspetti più nascosti e intriganti del mondo delle equazioni, quelli che sfuggono alla usuale trattazione offerta dai manuali scolastici, non potete lasciarvi sfuggire questo libro.

Il percorso tracciato dall'autore riguarda nello specifico le equazioni algebriche razionali, ma attenzione, nel libro non si parla solo di equazioni (numeriche, letterali, parametriche, reciproche, trinomie…), ma anche di monomi, polinomi, identità, sistemi di equazioni, problemi parametrici, anti-equazioni, funzioni, finzioni e altro ancora. *Finzioni?* Sì, proprio così, ma non si tratta di imbrogli, inganni… o scherzi dell'autore. Il termine *finzione* è utilizzato per includere e richiamare in maniera assonantica sia il nome sia il concetto di funzione nel designare una relazione binaria funzionale. Infatti, non tutte le "finzioni" sono "funzioni". A differenza di una funzione, una finzione non è necessariamente ovunque definita, perché gli elementi del suo dominio hanno *al più* un'immagine nel codominio. In virtù di ciò, il concetto di finzione permette di interpretare e chiarire numerosi aspetti dell'oggetto "equazione", per nulla banali o superflui, spesso nascosti nell'usuale prassi didattica, ma essenziali per comprendere a fondo la complessità della sua gestione, sia come *oggetto istituzionale* (Chevallard, 1985), sia come traduzione o modellizzazione di un problema, anche parametrico. Ecco allora che, dopo aver preso in esame la relazione tra equazione e problema, l'autore analizza in profondità la natura dell'oggetto "equazione" dal punto di vista morfologico, semantico e sintattico, e i suoi legami con l'oggetto "funzione". Tutto ciò grazie, soprattutto, all'uso di *finzioni di sostituzione, di parametrizzazione*, *di valutazione* e *soluzione*, che permettono di definire diversi tipi di equivalenza: morfologica, sintattica, semantica, e pure strutturale. La definizione di equazione a cui giunge, su basi sia logiche sia applicative, risulta molto articolata ed elaborata. Per averne un'idea, senza entrare nei dettagli, diciamo solo che un'equazione è definita mediante una particolare terna (o coppia) costituita da: (1) una *proposizione* di un contesto algebrico, (2) una *finzione di parametrizzazione* (che può essere omessa, se non necessaria), (3) un *dominio* (relativo alle variabili non parametri presenti nella proposizione che individua l'equazione). Il percorso che conduce a una tale definizione, avverte l'autore, è particolarmente complesso, improponibile a livello di scuola secondaria. Esso, tuttavia, a un livello adulto e colto, offre interessanti ed efficaci strumenti concettuali, logici e cognitivi di analisi e di gestione delle ambiguità o insidie concettuali che si celano nelle varie definizioni, principi, procedimenti risolutivi, apparentemente semplici e innocui, inerenti al mondo delle equazioni (e non solo) comunemente utilizzati o condivisi a livello di scuola secondaria, in particolare:

- nelle definizioni di monomio, grado di un monomio, coefficiente di un monomio, equazione (numerica, letterale, parametrica…) e sua forma normale, dominio di un'equazione, condizioni di esistenza, equazione impossibile, determinata o "indeterminata";
- nell'uso di variabili, incognite e parametri, spesso confusi tra loro;
- nei cosiddetti "principi" di equivalenza;
- nell'uso improprio di determinati simboli o nell'abuso di formulazioni ambigue;
- nelle sostituzioni come procedure risolutive;
- nelle trasformazioni sintattiche in relazione a diversi ambiti o domini, spesso sottintesi.

La definizione di monomio è nota a tutti; in essa si assume implicitamente che le lettere abbiano tutte lo stesso ruolo. Ma cosa succede se un monomio è considerato come un termine di un'equazione parametrica? Per esempio, nell'equazione $(k-1)x^2+(5k-3)x+5-k=0$, cosa si può dire del termine $(k-1)x^2$? Lo possiamo considerare come un'espressione algebrica costituita da un coefficiente numerico e da una parte letterale? Se sì, tra le lettere della parte letterale, compaiono solo moltiplicazioni ed elevamenti a potenza con esponente naturale? Come rileva l'autore, la gestione delle equazioni parametriche richiede "un cambio di prospettiva radicale per uno studente poiché non solo lo obbliga a vedere un 'numero' dove c'è una 'lettera' (o addirittura una scrittura ben più complessa), ma anche, soprattutto, a modificare radicalmente il concetto di monomi simili" (p. 112). Da qui la necessità di un lavoro specifico sul concetto di parametro e sui diversi ruoli che possono avere le lettere che compaiono nella proposizione che individua un'equazione, anche per una gestione adeguata e consapevole, per nulla banale, della cosiddetta forma "canonica" (o "normale") delle numerose equazioni che si incontrano a livello di scuola secondaria.

A proposito di lettere, non pochi studenti manifestano un certo disagio, imbarazzo, o comunque insoddisfazione nel manipolare lettere morfologicamente diverse dalla "*x*". Anzi, non è rara l'identificazione dell'incognita o della variabile di un problema con la lettera "x". Come se l'informazione racchiusa da un problema o da un'equazione e la loro risoluzione dipendessero dalla forma della lettera utilizzata, vale a dire da questioni puramente morfologiche. Come mai?

Gli aspetti morfologici di un'equazione riguardano in generale la forma della proposizione che individua l'equazione, forma che nelle procedure risolutive è vincolata a particolari sostituzioni; gli aspetti sintattici sono strettamente legati alle proprietà delle relazioni coinvolte e della struttura numerica nella quale si considera l'equazione; mentre gli aspetti semantici sono inerenti alla determinazione delle soluzioni dell'equazione in un dato insieme. Come rileva l'autore, gli aspetti morfologici del concetto di equazione sono di solito ritenuti meno rilevanti, anche didatticamente, rispetto a quelli sintattici e semantici, dunque spesso trascurati o sottintesi. In particolare, nella risoluzione delle equazioni si insiste soprattutto sull'uso corretto dei cosiddetti "principi" di equivalenza, principi (o meglio teoremi) nei quali si condensano l'equivalenza sintattica e quella semantica. L'identificazione degli aspetti morfologici con quelli sintattici o semantici non è dunque rara, e può ostacolare fortemente la gestione delle equazioni (e non solo). Dal punto di vista semio-cognitivo, essa corrisponde all'identificazione degli aspetti iconico-qualitativi di una rappresentazione semiotica dell'oggetto "equazione" nel registro algebrico con altri aspetti, in particolare con quelli iconico-strutturali, indicali, o simbolici.

Numerosi sono gli esempi che l'autore fornisce a sostegno della sua riflessione teorica, anche sulla base della sua lunga esperienza di insegnante. Vediamone brevemente alcuni che riguardano l'equivalenza morfologica, sintattica e semantica.

Le equazioni in $\mathbb{R}$ individuate da $x+1=3$ e $y+1=3$ "sono equivalenti semanticamente, ma non morfologicamente, a meno che non si possa sostituire la x con la y (o viceversa)" (p. 43). Anche le equazioni individuate da $x+2y=3$ e $2y+x-3=0$ non sono morfologicamente equivalenti in assenza di informazioni sulle proprietà delle operazioni coinvolte, di natura prettamente sintattica; tuttavia, esse sono semanticamente equivalenti in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, nel senso che ogni coppia di numeri reali che soddisfa la prima uguaglianza soddisfa anche la seconda, e viceversa; in altre parole, le rispettive finzioni di valutazione sono uguali.

Le equazioni individuate da $x-2=0$ e $\left(x-2\right)^2=0$ in $\mathbb{R}$ sono semanticamente equivalenti, ma non sintatticamente equivalenti, perché non è possibile moltiplicare (rispettivamente dividere) entrambi i membri della prima (rispettivamente della seconda) equazione per $x-2$.

Che dire poi delle equazioni individuate da $x = 1$ e da $x + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$? In $\mathbb{R}$ sono semanticamente equivalenti? Sono sintatticamente equivalenti? Per carità, non sveliamo troppo…

Da questi e numerosi altri esempi emerge con forza il ruolo centrale che assume la gestione degli aspetti morfologici, sintattici, semantici, e più in generale semiotici, nei processi di insegnamento-apprendimento della matematica. Gli studi e le ricerche in didattica della matematica l'hanno evidenziato ampiamente in numerosi lavori di ricerca sin dagli anni '80 (Duval, 1988a, 1988b, 1988c), e continuano a fornire in ambito semio-cognitivo chiavi di lettura sempre più raffinate, articolate, profonde e concrete (si veda, per esempio: D'Amore, 2006; Duval, 1995, 2017).

Nella prefazione, Carlo Marchini, uno dei massimi logici italiani, dichiara di aver intrapreso gli studi di matematica proprio per capire meglio e di più questi e altri "misteri". E si vanta con orgoglio di essere riuscito a trasmettere la sua "insoddisfazione" su ciò che sapeva a uno dei suoi studenti, Achille Maffini. "Questo testo ne è una prova perché in esso molte delle domande che mi ponevo trovano una risposta approfondita" (p. 11). Domande che si pongono anche tanti altri studenti e insegnanti.

Riferimenti bibliografici

Chevallard, Y. (1985). *Transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.

D'Amore, B. (2006). Oggetti matematici e senso. Le trasformazioni semiotiche cambiano il senso degli oggetti matematici. *La matematica e la sua didattica*, *20*(4), 557–583.

Duval, R. (1988a). Écarts sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, *1*, 7–25.

Duval, R. (1988b). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, *1*, 57–74.

Duval, R. (1988c). Graphiques et équations. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, *1*, 235–253.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations*. (Prefazione di Bruno D'Amore). Cham: Springer International Publishing AG. [Lavoro originale pubblicato in portoghese da Proem Editora, São Paulo, 2011]. doi:10.1007/978-3-319-56910-9

Maura Iori

Gabriele Lolli (2018). *Matematica come narrazione: Raccontare la matematica*. Bologna: il Mulino.

Roland Barthes in *Letteratura contro scienza* (1967) scrive che “le due culture” sono destinate a contrapporsi senza possibilità di dialogo: la letteratura utilizza il linguaggio con la consapevolezza che esso non è mai neutro né trasparente, cioè non è mai solo uno strumento per veicolare un contenuto di “realtà” esterno al linguaggio stesso; la scienza usa il linguaggio in modo referenziale, come se fosse un semplice strumento per esprimere “realtà” esterne ad esso. Italo Calvino (1968) non fa attendere a lungo una sua acuta e contundente risposta:

> Ma la scienza d’oggi può essere definita davvero da questa fiducia in un codice referenziale assoluto, o non è essa stessa ormai una continua messa in discussione delle proprie convenzioni linguistiche? E – almeno per quel che riguarda la matematica – piuttosto che alla pretesa di fondare un discorso su una verità esterna ad esso, ci troviamo di fronte a una scienza non aliena dal giocare col proprio processo di formalizzazione (...). Va valorizzato (...) il posto che il pensiero matematico sta prendendo nella cultura anche umanistica e quindi nella letteratura. (Calvino, 1968, p. 69)

A confermare la sua visione del connubio fra linguaggio della scienza e linguaggio della letteratura, Calvino (1967) aveva dichiarato che:

> Galileo è il più grande scrittore della letteratura italiana di ogni secolo. Galileo usa il linguaggio non come uno strumento neutro, ma con una coscienza letteraria, con una continua partecipazione espressiva, immaginativa, addirittura lirica. (...) Galileo ammirò e postillò quel poeta cosmico e lunare che fu Ariosto; (...) Leopardi nello *Zibaldone* ammira la prosa di Galileo per la precisione e l’eleganza congiunte. (Calvino, 1967, p. 11)

Si noti: il più grande scrittore della *letteratura* italiana; non di linguaggio scientifico si sta parlando, dunque, ma letterario.

Queste frasi perentorie, che scatenarono un’ondata di critiche nel mondo della letteratura italiana, prima fra tutte quella di Carlo Cassola, appaiono in un famoso articolo di Calvino pubblicato sul *Corriere della Sera* il 24 dicembre 1967.

Tale opinione sulla lingua letteraria di Galileo è confermata dal linguista e storico della letteratura Francesco Bruni (nel 1984); dalla grande linguista, membro della Crusca, Maria Luisa Altieri Biagi (nel 1985); da Alberto Asor Rosa (nel 1993); e da tanti altri famosi studiosi di letteratura italiana; ma era già stata anticipata da una dichiarazione analoga del filologo e linguista Bruno Migliorini (nel 1960).

Uno scienziato eletto a narratore! Il suo linguaggio scientifico assunto come narrativo.

Abbiamo potuto constatare negli anni che pochi sanno che Galilei fu anche critico d’arte figurativa di grandissimo livello, che stroncò i lavori del

Parmigianino (Girolamo Francesco Maria Mazzola), del Bronzino (Agnolo di Cosimo di Mariano) e di Annibale Carracci; e lodò invece molto l'opera di Raffaello Sanzio, Giorgione, Giorgio da Castelfranco e Tiziano Vecellio. E fu critico di poesia stimatissimo delle opere di Dante Alighieri, Francesco Petrarca, Ludovico Ariosto, Torquato Tasso, ma anche dotto commentatore di opere più antiche, come quelle di Tito Maccio Plauto e Quinto Orazio Flacco. Su pressione del padre, fu anche studioso di musica (dal punto di vista fisico) e di musicologia, dal punto di vista critico-artistico. Un suo brano di altissimo pregio puramente letterario si trova nel *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*:

> Quei tratti tirati per tanti versi, di qua, di là, in su, in giù, innanzi, indietro, e 'ntrecciati con centomila ritortole, non sono, in essenza e realissimamente, altro che pezzuoli di una linea sola tirata tutta per un verso medesimo, senza verun'altra alterazione che il declinar del tratto dirittissimo talvolta un pochettino a destra e a sinistra e il muoversi la punta della penna or più veloce ed or più tarda, ma con minima inegualità. (Galilei, 1992, Giornata Seconda, p. 199)

Tanto che, nel *Barone Rampante*, così Calvino (1957) si … ispira … al Galilei letterato:

> Questo filo d'inchiostro, come l'ho lasciato correre per pagine e pagine, zeppo di cancellature, di rimandi, di sgorbi nervosi, di macchie, di lacune, che a momenti si sgrana in grossi acini chiari, a momenti si infittisce in segni minuscoli come semi puntiformi, ora si ritorce su se stesso, ora si biforca, ora collega grumi di frasi con contorni di foglie o di nuvole, e poi s'intoppa, e poi ripiglia a attorcigliarsi, e corre e corre e si sdipana e avvolge un ultimo grappolo insensato di parole idee sogni ed è finito. (Calvino, 1957, p. 263)

Dunque, è fatta: linguaggio narrativo e linguaggio scientifico non sono agli opposti, ma interagiscono e si influenzano reciprocamente.

Al momento dello scontro fra Barthes e Calvino e poi fra Calvino e Cassola, era già nato e si era imposto il gruppo (soprattutto francese) OuLiPo (Ouvroir de Littérature Potentielle, Officina di Letteratura Potenziale) fondato nel 1960 dal poeta e scrittore Raymond Queneau e dal matematico François Le Lionnais, con la partecipazione di altri matematici, poeti e romanzieri, fra i quali lo stesso Calvino. Molto scalpore crearono le regole algebriche per la scrittura di testi letterari.

Ma la domanda resta sempre viva: Si può *narrare* la matematica? La risposta è banalmente positiva: certo, basta prendere in esame un testo di storia della matematica; ma non un testo di vera storia, scritta da storici specialisti, perché questo sarebbe per molti di nuovo un esempio di linguaggio scientifico molto denso e specifico, vera ricerca scientifica; intendiamo dire un testo dove si narra la storia della matematica, delle idee matematiche, dei personaggi della matematica, scritto proprio per raccontare. E allora la risposta positiva è banale, troppo scontata.

Vogliamo chiedere di più: È possibile *considerare la matematica come narrazione*? E qui entra in campo questo libro di Gabriele Lolli che dà una risposta positiva convincente e determinante, rivoluzionaria. Sì, perché le tecniche del ragionamento, scrive l'autore sono nate dalla retorica e dalla poesia greca: "Ogni dimostrazione diviene allora la storia di un viaggio in un paese sconosciuto, alla ricerca di nuove strade di collegamento". E il fascino di questa affermazione ti conquista fin dalla copertina del libro e segue, convincente, nei vari capitoli. I grandi racconti della matematica sono quelli, per esempio, del lavoro di Cantor e della conquista letteraria dell'universo degli insiemi, la narrazione dei gruppi algebrici connessi alle geometrie, la conquista dell'infinito, il programma di Robert Langlands, uno dei temi più complessi e affascinanti della matematica contemporanea. Come si usano le (necessarie) metafore in matematica, che relazione c'è fra una dimostrazione e una storia. Che cosa sono dal punto di vista epistemologico gli oggetti (enti) della matematica, le dimostrazioni dinamiche, come funzionano le etimologie nella narrazione matematica. Chi sono gli eredi moderni di Platone e di Aristotele e come funzionano le loro narrazioni. Come intendere il linguaggio matematico, solo come uso dei simboli e loro significati o anche come la necessità di seguire le regole che si impongono usando le formule. Come si passa dalla poesia narrativa di Omero alla retorica e al suo uso in matematica. Quanto in Euclide è poesia e quanto è logica e quanto è tutt'e due, senza differenza alcuna.

Ogni capitolo di questo libro è una scoperta che ti lascia di stucco. Ma colpisce molto l'unica frase che campeggia nella IV di copertina: "La poesia dice di più con meno parole. Anche la matematica". Esempio?

"Ognuno sta solo sul cuor della terra
trafitto da un raggio di sole:
ed è subito sera."

17 parole. Chi non le conosce? Chi di noi non le ha imparate a memoria? Chi di noi non è rimasto senza fiato, la prima volta che le ha lette?

In altra occasione ci azzardammo a paragonare questi versi stupendi immortali a una definizione che si pone alla base dello studio dell'infinito in matematica:

"Un insieme si dice infinito se può essere messo in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria".

17 parole. Il caso?

Per spiegare la poesia del premio Nobel Quasimodo un critico letterario ricorre a una discreta quantità di pagine; la narrazione epica drammatica descritta nei tre versi racchiude un'intera vita umana, se non più, la considerazione stessa della vita, il suo senso, millenni di storia e di esperienza. La definizione matematica racconta una storia di quasi 3000 anni, dai primi vagiti sull'ápeiron di scuola taletiana alla formulazione di Dedekind (forse già intuita da Galileo).

Due narrazioni intrinseche, entrambe ricche di profondo fascino.

Il lettore si sarà certamente accorto che il testo scritto finora si presenta come una argomentazione a favore della tesi *La matematica può essere vista come una narrazione*; tale argomentazione è stata condotta partendo da argomenti più distanti, apparentemente assai più marginali, che in realtà sono serviti per escludere interpretazioni del "narrare la matematica" che potrebbero portare fuori dalla traiettoria che si stava seguendo, e arrivando infine al cuore della questione, suffragando la posizione sostenuta con esempi, con dei "fatti". Qualche lettore troverà l'argomentazione convincente, saprà forse esplorare altri percorsi di ragionamento, saprà portare altri argomenti ed esempi a favore; qualcun altro sarà dubbioso e troverà argomenti che la contraddicono, portando esempi che confermano il suo alternativo punto di vista. Tuttavia, non sarà probabilmente difficile convenire sul fatto che le argomentazioni matematiche sono diverse da quelle usuali o da quelle di altri territori, anche se spesso non è facile spiegare in che cosa tale differenza consista davvero. Come nota Lolli, se la matematica è una narrazione di fatti, allora essa è un discorso-narrazione rigidamente vincolato nella sua struttura; per poter essere sostenuta, questa tesi della matematica come discorso-narrazione necessita di un particolare convincimento: che certi tipi di fatti ammettano descrizioni solo in forma di dimostrazione, di quella che usualmente si intende con dimostrazione (Lolli, 1988, p. 76). Se pur riuscissimo a fare buona opera di persuasione e il lettore dovesse/volesse convenire con noi su questo aspetto (che tra i lettori matematici incontrerebbe probabilmente poca resistenza), esso non aiuterebbe molto a chiarire il concetto della matematica come narrazione: l'unica differenza che apporterebbe tale opera di persuasione sarebbe quella di un accordo tra i partecipanti sul poter appendere a ogni dimostrazione l'etichetta "narrazione matematica". E in effetti, il punto della questione non è questo, è un altro:

> la teoria intesa come spiegazione dei fatti ricorda momenti di scientismo che sono meglio rappresentati nella tradizione del romanzo poliziesco che in quella scientifica (...); normalmente sono i fatti che sostengono le spiegazioni e non viceversa. (...) La posizione della matematica è però molto diversa: è la matematica che crea i fatti, non una descrizione che si adatta ad essi. (Lolli, 1988, p. 77)

Dunque, la narrazione matematica non è una dimostrazione della verità di una congettura su certi fatti, ma è la narrazione della congettura dei fatti stessi nonché della convalida di tale narrazione. Vista così, l'impresa narrativa matematica è un racconto grandioso, creativo, che crea il proprio oggetto mentre lo narra; un racconto che narra la propria creazione, in un affascinante gioco che fa scorrere la trama su una superficie simile alla bottiglia di Klein, nella quale interno ed esterno si confondono e sono una cosa sola.

Ma i discorsi sono fatti dagli esseri umani e le narrazioni sono narrazioni di qualcosa e quindi anche la narrazione matematica non è fine a sé stessa; essa è il/un processo di/per dare-senso-alla matematica. Lolli osserva che particolarmente pertinente per la matematica è il modello della fiaba perché le fiabe

> sono un deposito di mondi inventati, mondi in parallelo o intrecciati a quello in cui viviamo, senza temere le palesi incoerenze (...). Come ogni fiaba struttura una storia inserendo in modo originale nuovi personaggi (...) nei moduli ricorrenti del genere, così ogni nuovo concetto astratto è il protagonista di una teoria diversa sostenuta dalle tecniche generali del ragionamento matematico. (Lolli, 2018, p. 12)

Dunque la coerenza dei mondi matematici, così come quella dei mondi delle fiabe, non deriva dalla loro corrispondenza con una qualche realtà empirica o con il senso comune; anzi, spesso questi mondi sono incoerenti secondo tali criteri; la coerenza dei mondi immaginifici fiabeschi o matematici è sostenuta dalla loro stessa struttura ricorrente (Propp, 1966). Infatti, citando Calvino, Lolli nota che le strutture narrative sono considerate dalla critica come esistenti per conto loro, ma si spinge ancora oltre, aprendo una nuova porta nella interpretazione della narrazione matematica, interpretazione nella quale tali strutture non solo esistono per conto loro, ma "forse le hanno precedute, e forse prefigurate" (Lolli, 2018, p. 13).

In questo senso la narrazione matematica è paragonabile a un romanzo di formazione del narratore stesso: un viaggio con un significato epistemologico profondo, che porta a una presa di coscienza di un nuovo modo di conoscere, un modo di conoscere sofisticato e per nulla "naturale", ma insito nelle strutture narrative del linguaggio. In effetti, quello che Lolli prefigura nel suo libro è una possibile crescita "senza fratture dall'età delle fiabe a quella della conoscenza scientifica" (Lolli, 2018, p. 13).

Suggeriamo a tutti gli insegnanti di matematica di leggere e meditare questo libro, ma di considerarlo appunto, come un invito a prendere in seria considerazione gli aspetti narrativi della matematica, anche nell'ipotesi che questo atteggiamento, questo aspetto, possa essere di un qualche aiuto nella prassi didattica. Sentirsi raccontare la matematica, anziché vedersela imporre, potrebbe agevolare quegli studenti che, pur capaci, hanno perso qualcosa nel contatto iniziale con la nostra disciplina; e questo potrebbe essere il primo passo verso una propria personale narrazione matematica di ciascuno studente. Chissà.

Riferimenti bibliografici

Barthes, R. (1967). Science versus literature. *The Times Literary Supplement*, 28 settembre 1967, p. 897.

Calvino, I. (1957). *Il barone rampante*. Torino: Einaudi.

Calvino, I. (1967). Lettera ad Anna Maria Ortese. *Il Corriere della Sera*, 24 dicembre 1967, p. 11.
Calvino, I. (1968). *Due interviste su scienza e letteratura*. Milano: Mondadori.
Galilei, G. (1992). *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*. Pordenone: Edizioni Studio Tesi.
Lolli, G. (1988). *Capire una dimostrazione*. Bologna: il Mulino.
Lolli, G. (2018). *Matematica come narrazione*. Bologna: il Mulino.
Propp, V. J. (1966). *Morfologia della fiaba*. Torino: Einaudi. (Lavoro originale pubblicato in lingua russa nel 1928).

Miglena Asenova e Bruno D'Amore

Bruno D'Amore e Silvia Sbaragli (2018). *La matematica e la sua storia: Dagli ultimi bagliori della Grecia antica alla fine del Medioevo.* Volume II. Bari: Dedalo.

La matematica è considerata una delle massime espressioni del pensiero umano e, con l'introduzione del metodo scientifico galileiano, la regina di tutte le scienze. Eppure, troppo spesso, vive una sorta di isolamento culturale. Nella scuola superiore, la separazione, del tutto ingiustificata, tra le discipline umanistiche e quelle scientifiche è particolarmente marcata. Nei percorsi universitari, ci si concentra soprattutto sugli aspetti tecnici e formali della matematica, se non si considerano gli indirizzi di studio che richiedono gli approfondimenti storici e fondazionali. Occorre ricordare che la matematica è un'esperienza umana, inscindibile dal clima sociale, storico e culturale in cui è nata e in cui successivamente si è sviluppata. Un clima fatto di visioni del mondo, convinzioni, credenze, valori, passioni, bisogni ideali e materiali … Per dirlo con le parole di Bruno e Silvia, tratte dalla premessa al primo volume de *La matematica e la sua storia*, "per noi la matematica è un umanesimo".

Senza questa consapevolezza, perdiamo la ricchezza e la profondità della matematica che, non a caso, è troppo spesso considerata una disciplina arida, un mero calcolo formale. Invece, come ci insegna Luis Radford, la matematica è un'attività umana che si sviluppa in virtù dell'uso di artefatti culturali, materiali e ideali. La complessa trasformazione di segni che caratterizza il pensiero matematico non può e non deve dimenticare che tali segni condensano il lungo percorso, durato anche millenni, che l'uomo ha compiuto nell'interpretare e dare significato matematico alla sua esperienza del mondo. La scuola spesso dimentica la densità culturale intrinseca ai segni e agli artefatti utilizzati nella pratica matematica in aula, con due conseguenze importanti sull'apprendimento degli studenti:

- allo sviluppo cognitivo dell'alunno mancano alcuni passaggi chiave per costruire la complessa rete concettuale che caratterizza il sapere matematico;
- gli allievi percepiscono la matematica come arida, insignificante e "disincarnata", e la studiano con una relazione affettiva negativa caratterizzata da rifiuto, paura, mancanza di motivazione e volizione.

La storia della matematica introduce il lettore alla ricchezza e alla profondità della matematica, accompagnandolo nella complessità del suo sviluppo, che include aspetti filosofici, scientifici, letterari, artistici, politici … Se il primo volume ha analizzato lo sviluppo della matematica dalla sua nascita fino alle vette raggiunte dalla matematica greca, il secondo ne descrive gli ultimi bagliori per spostare poi l'attenzione del lettore su quella etrusca e latina fino al Medioevo. È particolarmente interessante la parte dedicata alla matematica dell'Asia (India e Cina) e delle Americhe (Maya, Aztechi e Inca). Uno sguardo interculturale che apre interessanti considerazioni concettuali, didattiche e pedagogiche.

Il testo permette di rivivere la genesi dei più importanti concetti matematici e di considerarli da più punti di vista, tenendo come riferimento l'essere umano, sempre inserito nel suo specifico contesto sociale, storico e culturale. Per esempio, l'opera permette un confronto tra la logica aristotelica, quella megarico-stoica e la logica indiana nyaya, un confronto che, oltre all'interesse storico e concettuale, apre considerazioni molto profonde sulla didattica della dimostrazione. Lo stesso vale per il confronto, che l'opera permette di sviluppare, tra il concetto di numero nelle diverse civiltà; trovo di particolare interesse didattico l'approfondimento sullo sviluppo dei sistemi di numerazione nelle Americhe per la profondità delle riflessioni sugli aspetti concettuali, algoritmici e semiotici dell'apprendimento, che se ne possono ricavare.

Gli aspetti matematici sono spiegati in modo chiaro ed esaustivo, rimandando anche a una ricca bibliografia. Il testo può essere letto come una storia della matematica ma anche come un libro di storia narrato con gli occhi della matematica.

Un libro che mi sento di consigliare a chiunque nutra interesse per la matematica, in particolare al docente di matematica. Egli potrà approfondire la sua preparazione disciplinare e, al contempo, trovare spunti per migliorare la propria didattica e strumenti per comprendere alcune delle difficoltà di apprendimento dei suoi studenti.

George Santi

Prieto Fandiño, J. L. (2018). ***La componente rappresentativa dell'architettura*. Bologna: Pitagora.**

Fra tutti i domini artistici, l'architettura è quella che maggiormente usa conoscenze geometriche. L'originalità di questo libro è di guardare alla grande diversità delle rappresentazioni che devono essere messe in atto prima che inizi la costruzione di un'opera destinata a compiere una funzione simbolica, culturale o economica nella vita sociale. Queste rappresentazioni, che vanno dalla concezione alla costruzione dell'opera, sono rappresentazioni semiotiche, alcune ovviamente geometriche e le altre, altrettanto importanti, no. E questo fatto pone tre domande per capire il lavoro di creazione e produzione in architettura. Quali tipi di rappresentazioni semiotiche? Per quale funzione esse vengono prodotte? Infine: In quale ordine il lavoro di creazione progredisce, fino alla loro costruzione reale?

Questo libro si concentra sulle prime due domande. Tutte le rappresentazioni prodotte per l'elaborazione e la realizzazione di un progetto sono analisi in funzione di tre tipi di attività cognitivamente ed epistemologicamente diverse: vedere, rappresentare e costruire. Ciò porta a privilegiare la questione della funzione delle rappresentazioni rispetto a quella della loro natura, come i singoli titoli dei capitoli opportunamente indicano. E, attraversando tutti i capitoli, si ritrova proprio la varietà semiotica delle rappresentazioni prodotte: rappresentazioni iconiche strumentalmente disegnate per il piano di un edificio o per la sua facciata; schemi non iconici a mano libera per evocare la forma globale vista in prospettiva; figure geometriche per calibrare, per esempio, il rigonfiamento delle colonne in modo tale che, a distanza, esse appaiano perfettamente diritte; prospettiva cavaliera dei solidi che saranno costruiti; ecc. L'ultimo capitolo, e soprattutto le pagine 97–100, fornisce una risposta alla terza domanda sistemando, secondo un ordine logico, i diversi tipi di rappresentazioni semiotiche prodotte per elaborare e realizzare un progetto in architettura.

La lettura di questa opera solleva due domande.

La prima riguarda l'ordine logico presentato. Non potrebbe essere quello opposto? Perché è necessario partire dal modo in cui l'opera, quando sarà materialmente costruita, apparirà allo sguardo dall'esterno, e anche all'interno, quando vi si entrerà. In definitiva, non ci potrebbe essere un'interazione tra la fase finale e ciascuna delle fasi precedenti?

La seconda domanda è essenziale e va ben oltre il lavoro dell'architetto, perché tutte le rappresentazioni sono semioticamente di natura diversa. Alcune sono rappresentazioni piane (2D/2D) e altre sono rappresentazioni in prospettiva (3D/2D). Inoltre, alcune sono rappresentazioni iconiche, altre sono schemi e altre ancora sono figure geometriche. In che modo tutte queste rappresentazioni si articolano l'una con l'altra per mostrare o concepire quello stesso oggetto che sarà poi l'edificio costruito?

Queste domande mostrano le strade che forse questo libro apre per la ricerca non solo in didattica dell'architettura, ma sicuramente per quella sull'insegnamento della geometria.

Reseña (en español)

Entre todos los dominios artísticos, la arquitectura es la que utiliza con mayor razón el conocimiento geométrico. La originalidad de este libro está en la observación de la gran diversidad de representaciones que deben implementarse antes de que comience la construcción de una obra destinada a cumplir una función simbólica, cultural o económica en la vida social. Estas representaciones, que van desde la concepción hasta la construcción de la obra, son representaciones semióticas, algunas obviamente geométricas y las otras, igual de importantes, no. Y esto plantea tres preguntas para comprender el trabajo de creación y producción en arquitectura. ¿Qué tipos de representaciones semióticas? Y, ¿para qué función se producen? Finalmente: ¿En qué orden para que el trabajo de la creación avance hacia la construcción real?

Este libro se enfoca en las primeras dos preguntas. Todas las representaciones producidas para la concepción y la realización de un proyecto son analizadas en función de tres tipos de actividades cognitiva y epistemológicamente diferentes: ver, representar y construir. Esto conduce a privilegiar la cuestión de la función de las representaciones con respecto a su naturaleza, como oportunamente indican los títulos de cada capítulo. Y, a través de todos los capítulos, se reconoce exactamente la variedad semiótica de las representaciones producidas: representaciones icónicas instrumentalmente diseñadas por la planta de un edificio o de su fachada; esquemas no icónicos a mano alzada para evocar la forma global vista en perspectiva; figuras geométricas para calibrar, por ejemplo, la éntasis de las columnas de forma tal que, a distancia, parezcan perfectamente derechas; perspectiva clásica de los sólidos que serán construidos; etc. El último capítulo, y especialmente las paginas 97-100, ofrece una respuesta a la tercera pregunta sistematizando, de acuerdo a un orden lógico, los diferentes tipos de representaciones semióticas producidas para desarrollar y realizar un proyecto en arquitectura.

La lectura de este libro plantea dos preguntas.

La primera se refiere al orden lógico presentado. ¿No podría ser el orden opuesto? Dado que es necesario partir del modo en el cual la obra, cuando será materialmente construida, aparecerá a la mirada del exterior y también al interior, cuando se entra en ella. ¿En resumidas cuentas, no podría existir una interacción entre la fase final y cada una de las fases anteriores?

La segunda pregunta es esencial y va más allá del trabajo del arquitecto, dado que todas las representaciones son de naturaleza semióticamente diferente. Algunas son representaciones planas (2D/2D) y otras representaciones en perspectiva (3D/2D). Además, algunas son representaciones icónicas, otras son esquemas y otras son figuras geométricas. ¿Cómo se articulan todas estas representaciones entre sí para mostrar o concebir aquel mismo objeto que será, al final, el edificio construido?

Estas preguntas muestran las rutas que tal vez este libro abre para la investigación no sólo en didáctica de la arquitectura, sino también seguramente para la enseñanza de la geometría.

Raymond Duval

ELMI, raccolta di Elenchi di Link a pagine per la Matematica in Italia

La Biblioteca matematica dell'Università degli Studi di Milano ha effettuato la quinta immissione in internet di dati per ELMI, raccolta di Elenchi di Link a pagine per la Matematica in Italia:
http://www.mat.unimi.it/users/ELMI/ELMI-ABB.htm.

La raccolta è curata da Gabriele Lucchini e Alberto Marini con la collaborazione di Giuliano Moreschi, direttore della Biblioteca, ed è comparsa in rete nel giugno 2017.

Inizialmente rivolta a proporre pagine bio-bibliografiche, è stata poi ampliata alle 28 sezioni attualmente proposte nella mappa ELMI-MAP, http://www.mat.unimi.it/users/ELMI/ELMI-Map.htm
direttamente raggiungibile in Google.

Il file più consistente è ELMI-ABB.htm - Anagrafe Bio-Bibliografica che presenta 5558 persone (di cui 1088 donne) con 10873 link (c'è un file di dati statistici http://www.mat.unimi.it/users/ELMI/ELMI-Stat.htm).

I curatori hanno presentato la raccolta in:
http://www.matmedia.it/elmi-elenchi-link-pagine-sulla-matematica-italia/

Ulteriori informazioni sono nell'invito a consultare ELMI di
http://www.mat.unimi.it/users/lucchini/g409.htm,
dove è segnalato che i fogli di stampa a 100% sono 298.